SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Annamaria Montanari

REGOLARITÀ C^∞ DELLE SOLUZIONI VISCOSE DELL'EQUAZIONE DI CURVATURA DI LEVI

28 giugno 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Riassunto. In questa nota si affronta il problema della regolarità C^∞ delle soluzioni viscose dell'equazione di Levi con assegnata curvatura k di classe C^∞. Si tratta di un'equazione quasilineare del secondo ordine con minimo autovalore identicamente nullo: pertanto l'equazione è non ellittica in ogni punto. A meno di un fattore moltiplicativo, scriviamo formalmente l'operatore differenziale del secondo ordine associato all'equazione come somma di quadrati di operatori differenziali del primo ordine X e Y, i cui coefficienti dipendono dal gradiente della soluzione u. Se la curvatura k è sempre diversa da zero allora, identificando gli operatori differenziali del primo ordine con i campi vettoriali aventi gli stessi coefficienti, i campi vettoriali $X, Y, [X, Y]$ sono linearmente indipendenti in ogni punto. Questa condizione ci consente di stabilire delle stime a priori L^2 per le derivate parziali seconde delle soluzioni viscose dell'equazione, dalle quali segue in particolare la regolarità H^1_{loc} dei coefficienti dei campi. La regolarità C^∞ delle soluzioni viscose dell'equazione di Levi si ottiene poi con un procedimento iterativo di tipo *bootstrap* in spazi di Sobolev modellati sulla geometria dell'operatore.

Come applicazione di questo risultato di regolarità mostriamo poi l'esistenza di almeno una soluzione classica del problema di Dirichlet associato all'equazione di Levi su una classe di aperti strettamente pseudoconvessi e con dato al bordo $C^{2,\alpha}$.

Abstract. In this note we deal with the C^∞ regularity problem for viscosity solutions of the Levi equation with prescribed crvature k of class C^∞. It is a quasilinear second order partial differential equation whose minimum eigenvalue is identically zero: therefore the Levi equation is not elliptic at every point. Unless a multiplying factor we formally write the second order partial differential operator combined with the equation as a sum of squares of first order differential operator X and Y, whose coefficients depend on the gradient of the solution u. If the curvature k is always different from zero then, by identifying the first order differential operators with the vector fields having the same coefficients, the vector fields $X, Y, [X, Y]$ are linearly indipendent at every point. This condition allows us to establish a priori L^2 estimates for the second order partial derivates of viscosity solutions of the equation, from which it follows the H^1_{loc} regularity for the coefficients of the vector fields. These results provide the starting point for a boootstrap argument in Sobolev spaces modelled on the geometry of the operator, which allows us to prove the C^∞ regularity for viscosity solutions of the Levi equation.

As an application of this regularity result we prove the existence of a classical solution of the Direchlet problem for the Levi equation on a class of strictly pseudoconvex sets with $C^{2,\alpha}$ boundary data.

In questo seminario annunciamo un recente risultato, ottenuto in collabarazione con Citti e Lanconelli, che risponde al problema aperto della regolarità C^∞ delle soluzioni viscose dell'equazione di Levi.

L'equazione della curvatura di Levi è la seguente

$$\mathcal{L}(\nabla u)u = k(\cdot, u)\frac{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{1+u_t^2}, \tag{1}$$

dove $\mathcal{L}(\nabla u)$ è l'operatore differenziale del secondo ordine

$$\mathcal{L}(\nabla u) := \partial_{xx} + \partial_{yy} + 2a(\nabla u)\partial_{xt} + 2b(\nabla u)\partial_{yt} + (a^2(\nabla u) + b^2(\nabla u))\partial_{tt}, \tag{2}$$

i cui coefficienti a e b dipendono dal gradiente di u come segue

$$a(\nabla u) := \frac{u_y - u_x u_t}{1+u_t^2}, \quad b(\nabla u) := \frac{-u_x - u_y u_t}{1+u_t^2}. \tag{3}$$

Qui abbiamo indicato con (x, y, t) il punto di $\mathbb{R}^3$, con ∇u il gradiente euclideo di u, con u_t la derivata parziale di u rispetto a t e abbiamo utilizzato un'analoga notazione per le derivate parziali rispetto a x e y.

L'equazione (1) è un'equazione quasilineare del secondo ordine la cui matrice caratteristica è

$$A(p) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & a(p) \\ 0 & 1 & b(p) \\ a(p) & b(p) & a^2(p) + b^2(p) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

con $p = \nabla u$. Pertanto la forma quadratica

$$\xi \to < A(p)\xi, \xi >$$

è semidefinita positiva ed ha minimo autovalore nullo per ogni $p \in \mathbb{R}^3$. Dunque l'operatore $\mathcal{L}$ è non ellittico in ogni punto.

La funzione k a secondo membro di (1) è la curvatura di Levi dell'ipersuperficie reale di $\mathbb{C}^2$, identificando $\mathbb{C}^2$ a $\mathbb{R}^4$, grafico della funzione u.

L'equazione di Levi si presenta in modo naturale nello studio dei domini di olomorfia. Ricordo che un insieme aperto $D \subset \mathbb{C}^2$ è un dominio di olomorfia se per ogni $p \in \partial D$ esiste una funzione f completamente singolare in p, cioè tale che per ogni intorno U di p non esiste alcuna funzione olomorfa in U che coincide con f in qualche componente connessa di $U \cap D$.

E.E. Levi nel 1909 aveva osservato che se introduciamo le coordinate complesse $z_1 = (x, y), z_2 = (t, s)$ e scriviamo localmente D come il sottografico di una fnzione u di classe C^2

$$D = \{s - u(x, y, t) < 0\},$$

allora se D è un dominio di olomorfia deve essere $k \geq 0$ in ogni punto dell'ipersuperficie

$$M = \{s - u(x, y, t) = 0\}.$$

Il viceversa è stato mostrato da Oka nel 1953: se $k > 0$ allora D è un dominio di olomorfia.

In particolare le sfere di $\mathbb{C}^2$ sono domini di olomorfia in quanto la loro curvatura è costante e uguale all'inverso del loro raggio.

A questo punto è naturale porsi il seguente problema: è possibile trovare un'ipersuperficie M, grafico di una funzione u, con assegnata curvatura k?

Un primo risultato in questa direzione è stato dimostrato da Slodkowski e Tomassini nel '91 con tecniche ellittiche: precisamente Slodkowski e Tomassini in [ST] si sono procurati delle stime a priori L^∞ del gradiente delle soluzioni dell'equazione di Levi, ed hanno dimostrato che il problema di Dirichlet associato all'equazione (1), su una classe di aperti Ω strettamente pseudoconvessi e con dato al bordo $C^{2,\alpha}$, ha almeno una soluzione viscosa $u \in Lip(\bar{\Omega})$.

Alla definizione di soluzione viscosa di (1) premettiamo la seguente osservazione. Per ogni ε, $0 < \varepsilon < 1$, e per ogni $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ la matrice

$$A_\epsilon(p) := A(p) + \epsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{1+p_3^2} \end{pmatrix}$$

è definita positiva ed il rapporto γ fra il massimo ed il minimo autovalore di $A_\epsilon(p)$ è limitato per $|p| < c$. Ma allora, per la teoria classica delle equazioni alle derivate parziali uniformemente ellittiche, se u è una soluzione classica di

$$\mathcal{L}_\epsilon(\nabla u)u := \mathcal{L}(\nabla u)u + \epsilon^2 \frac{u_{tt}}{1 + u_t^2} = k(\cdot, u)\frac{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}{1 + u_t^2} \tag{5}$$

in Ω, allora $u \in C^\infty$.

Possiamo allora definire le soluzioni viscose dell'equazione (1) come segue.

Definizione 1 *Diciamo che una funzione $u \in Lip(\Omega)$ è una soluzione viscosa dell'equazione (1) se esistono una successione (u_j) in $C^\infty(\Omega)$ ed una successione di numeri positivi $\epsilon_j \to 0$ per $j \to \infty$ tali che*

(i) (u_j) converge puntualmente a u in Ω,

(ii) (∇u_j) *è limitato in* L^∞,

(iii) $\mathcal{L}_{\epsilon_j}(\nabla u_j)u_j = k(\cdot, u_j)\frac{(1+|\nabla u_j|^2)^{3/2}}{1+(u_j)_t^2}$ *in* Ω *per ogni* j.

I risultati in [ST] assicurano che la classe delle soluzioni viscose di (1) è non vuota. Questo è forse il miglior risultato che si può sperare di ottenere con tecniche ellittiche.

Osserviamo qui esplicitamente che se u è soluzione nel senso della Definizione 1 allora u è soluzione viscosa in senso debole secondo la defininizione di Crandall-Ishii-Lions [CIL]. Osserviamo inoltre che le tecniche di regolarizzazione di Caffarelli-Cabré [CC] per le soluzioni viscose in senso debole in questo caso non si applicano perché l'operatore $\mathcal{L}(\nabla u)$ è non ellittico in ogni punto.

Il nostro punto di vista è nuovo e diverso e tiene conto della geometria naturale del problema. Precisamente, se u è una fissata funzione di classe $C^2(\Omega)$, definiamo gli operatori differenziali del primo ordine

$$X(\nabla u) := \partial_x + a(\nabla u)\partial_t, \quad Y(\nabla u) := \partial_y + b(\nabla u)\partial_t. \tag{6}$$

Allora, applicando gli operatori differenziali del primo ordine $X(\nabla u)$ e $Y(\nabla u)$ alla funzione u si ottiene

$$X(\nabla u)u = -b(\nabla u), \quad Y(\nabla u)u = a(\nabla u). \tag{7}$$

Definiamo inoltre

$$X^2(\nabla u)f := X(\nabla u)(X(\nabla u)f),$$
$$[X,Y](\nabla u)f := X(\nabla u)(Y(\nabla u)f) - Y(\nabla u)(X(\nabla u)f).$$

Allora, a meno di un fattore moltiplicativo, l'operatore $\mathcal{L}(\nabla u)$ è una somma di quadrati degli operatori $X(\nabla u)$ e $Y(\nabla u)$,

$$\mathcal{L}(\nabla u)u = (1+u_t^2)(X^2(\nabla u)u + Y^2(\nabla u)u), \tag{8}$$

ed inoltre il commutatore di $X(\nabla u)$ e $Y(\nabla u)$ è esattamente

$$[X,Y](\nabla u) = -\frac{\mathcal{L}(\nabla u)u}{1+u_t^2}\partial_t, \tag{9}$$

(si veda ad esempio [C1]). Pertanto, se u è una soluzione classica dell'equazione (1) in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con $k \neq 0$ in ogni punto di $\Omega \times \mathbb{R}$ e se identifichiamo gli operatori differenziali del primo ordine con i campi vettoriali aventi gli stessi coefficienti, i campi

$$X(\nabla u) \equiv (1, 0, a(\nabla u))$$

$$Y(\nabla u) \equiv (0, 1, b(\nabla u))$$

$$[X, Y](\nabla u) \equiv (0, 0, -k(\cdot, u)\frac{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}{(1 + u_t^2)^2})$$

sono linearmente indipendenti in ogni punto. Questa condizione, chiaramente reminiscente della condizione di Hörmander di ipoellitticità per somma di quadrati di campi vettoriali lineari e a coefficienti C^∞ del primo ordine, risulta cruciale anche nello studio della regolarità delle soluzioni di (1). Questo si intuisce facilmente dalla seguente osservazione: se $k \equiv 0$ in $\Omega \times \mathbb{R}$ allora ogni funzione della sola variabile t è soluzione dell'equazione di Levi. Pertanto è impossibile guadagnare regolarità nella direzione t. Per le ipersuperfici Levi piatte un risultato di regolarità ottimale è stato dimostrato da Scerbina in [S]: *se $u \in C^1$ è una soluzione viscosa in senso debole di (1), con $k \equiv 0$, allora il grafico di u è foliato in curve analitiche.* In tal caso infatti l'equazione di Levi è un laplaciano su una varietà bidimensionale.

Nell'ottica dei campi vettoriali si colloca il lavoro di Citti [C2], dove si dimostra la regolarità C^∞ delle soluzioni $C^{2,\alpha}$ dell'equazione di Levi con assegnata curvatura $k \in C^\infty(\Omega), k(\xi) \neq 0$ per ogni $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Successivamente questo risultato è stato esteso in [CM1] a dimensione n arbitraria ed a funzioni di curvatura k più generali: precisamente $k \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), k(\xi, u, p) \neq 0$ per ogni $(\xi, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Le identità (8) e (9) giocano un ruolo fondamentale anche nello studio della regolarità delle soluzioni viscose di (1). Infatti in un recente lavoro in collaborazione con Citti [CM2] utilizziamo (8) e (9) per dimostrare che, per ogni soluzione u dell'equazione ellittica (5), la norma L^2 delle derivate intrinseche seconde

$$X^2(\nabla u)u, Y^2(\nabla u)u, XY(\nabla u)u, YX(\nabla u)u$$

è limitata da $||\nabla u||_\infty$; in particolare è indipendente da ϵ se $|\nabla u|$ è uniformemente limitato rispetto a ϵ.

A questo punto prendeva sempre più consistenza la seguente congettura: *le soluzioni viscose dell'equazione di Levi, con curvatura k di classe C^∞ e diversa da zero in ogni punto, sono C^∞.*

Rimaneva aperto il problema di dimostrare che le soluzioni viscose $u \in Lip(\Omega)$ e con derivate intrinseche seconde di quadrato sommabile in $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, sono funzioni di classe $C^{2,\alpha}(\Omega)$; problema da noi recentemente risolto in [CLM].

Teorema 1 *Le soluzioni viscose di (1), con curvatura non nulla e C^∞, sono C^∞.*

La prova di questo risultato si articola come segue.

I passo: Stime a priori $W^{2,2}$

Supponiamo $k(\xi, s) \neq 0$ per ogni $(\xi, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Sia $u \in C_0^\infty(\Omega)$ una soluzione dell'equazione regolarizzata (5). Derivando l'equazione (5) rispetto a t si prova che la funzione

$$v := \arctan u_t$$

è soluzione della seguente equazione

$$X^2(\nabla u)v + Y^2(\nabla u)v + \epsilon^2 \frac{\partial_{tt} v}{1 + u_t^2} = \frac{\partial_t\Big(k(\cdot, u)(1 + a^2(\nabla u) + b^2(\nabla u))^{3/2}\Big)}{(1 + u_t^2)^{1/2}}.$$

Questa osservazione e le identità (7), (8), (9) permettono di stabilire delle stime a priori in L^2 di tipo Caccioppoli per $\partial_t v, X(\nabla u)\partial_t v, Y(\nabla u)\partial_t v$, e quindi per $\partial_{tt} u$, $X(\nabla u)\partial_{tt} u$, $Y(\nabla u)\partial_{tt} u$, in termini di $||\nabla u||_\infty$.

Da queste stime, tenuto conto di (7), si deduce una stima $W^{2,2}$ per i coefficienti $a(\nabla u), b(\nabla u)$ in termini di $||\nabla u||_\infty$. Utilizzando poi il teorema di immersione di Sobolev classico si ottiene una stima α-hölderiana, con $\alpha = 1/2$, per $a(\nabla u), b(\nabla u)$.

A questo punto u è soluzione di

$$\mathcal{L}(\nabla u)u + \partial_{tt} u = k(\cdot, u)\frac{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}{1 + u_t^2} + u_{tt}\Big(1 - \frac{\epsilon^2}{1 + u_t^2}\Big)$$

dove il secondo membro è limitato in norma L^2 e a primo membro abbiamo un'equazione uniformemente ellittica con γ limitato, per $|\nabla u|$ limitato, e indipendente da ϵ. Ma allora, per la teoria classica delle equazioni uniformemente ellittiche

$$\begin{aligned} ||u||_{W^{2,2}} &\leq c_1 \Big|\Big| k(\cdot, u)\frac{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}}{1 + u_t^2} + u_{tt}\Big(1 - \frac{\epsilon^2}{1 + u_t^2}\Big)\Big|\Big|_2 \\ &\leq c_2 ||\nabla u||_\infty, \end{aligned}$$

dove $W^{2,2}$ è lo spazio di Sobolev ordinario, e le costanti positive c_1, c_2 non dipendono da ϵ.

II passo: Disuguaglianza di tipo Sobolev

Dapprima si stima la norma $W^{1/2,2}$ di $f \in C_0^\infty(\Omega)$ in termini di $||X(\nabla u)f||_2$ e $||Y(\nabla u)f||_2$, dove u è una soluzione dell'equazione regolarizzata (5) con curvatura non nulla. Successivamente si dimostra la seguente disuguaglianza di tipo Sobolev

$$||f||_{L^{3+\delta}} \leq c\Big(||X(\nabla u)f||_{L^2} + ||Y(\nabla u)f||_{L^2} + ||f||_{W^{1/2,2}}\Big) \tag{10}$$

dove $\delta \in [0,1]$ dipende dalla regolarità dei coefficienti $a(\nabla u), b(\nabla u)$ e c è una costante positiva dipendente da $||\nabla u||_\infty$ e indipendente da ϵ.

III passo: Stime a priori $W^{2,\infty}$

Si utilizza un procedimento iterativo degli L^p modellato sulla tecnica di Moser.

IV passo: Regolarità C^∞ delle soluzioni viscose

Sia ora u una soluzione viscosa di (1). Allora, per i precedenti risultati, $u \in W^{2,p}(\omega) \cap C^2(\omega)$ per ogni p e per ogni $\omega \subset\subset \Omega$.

In particolare i coefficienti $a(\nabla u), b(\nabla u)$ sono di classe $C^1(\omega)$ e

$$\mathcal{L}(\nabla u)u \in W^{1,p}(\omega)$$

per ogni p. Utilizzando allora una formula di rappresentazione per u deduciamo che le sue derivate intrinseche terze, nella direzione dei campi $X(\nabla u)$, $Y(\nabla u)$ sono funzioni $L^p(\omega')$ per ogni $\omega' \subset\subset \omega$ e per ogni $p < \infty$. Poiché i coefficienti $a(\nabla u), b(\nabla u)$ sono C^1 valgono teoremi di immersione di Sobolev ottimali per i campi $X(\nabla u), Y(\nabla u)$. La regolarità C^∞ di u si ottiene allora con un procedimento di tipo bootstrap in spazi di Sobolev modellati sui campi $X(\nabla u), Y(\nabla u)$.

Dal nostro risultato di regolarità segue in particolare l'esistenza di una soluzione classica del problema di Dirichlet associato all'equazione (1).

Corollario 1 *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$ e $k \in C^\infty(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}), k(\xi, s) \neq 0$ per ogni $(\xi, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$, tali che siano verificate le ipotesi del Teorema 4 in [ST]. Sia inoltre $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < 1$. Allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\nabla u)u = k(\cdot, u)\frac{(1+|\nabla u|^2)^{3/2}}{1+u_t^2} & \text{in } \Omega \\ u = \phi & \text{sul } \partial\Omega \end{cases}$$

ha almeno una soluzione classica $u \in Lip(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.

Bibliografia

[C1] G.Citti, C^∞ *regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, cl. Sci. **23**, 3, (1996), 483-529.

[C2] G.Citti, C^∞ *regularity of solutions of the Levi equation*, to appear on Analyse non Linéaire, Annales de l'I.H.P.

[CC] L.A.Caffarelli, X.Cabré, *Fully non linear elliptic equations* Amer. Math. Soc., Providence, 1995.

[CIL] M.G.Crandall, H.Ishii, P.L.Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **27** (1992), 1-67.

[CLM] G.Citti, E.Lanconelli, A.Montanari, lavoro in fase di preparazione.

[CM1] G.Citti, A.Montanari, *C^∞ regularity of solutions of an equation of Levi's type in R^{2n+1}*, preprint.

[CM2] G.Citti, A.Montanari, *Caccioppoli-type inequalities for the Levi equation*, preprint.

[S] N.V.Ščerbina, *The Levi form for C^1-smooth hypersurfaces, and the complex structure on the boundary of domains of holomorphy* Math. USSR Izves **19** (1982), 171 - 188.

[ST] Z.Slodkowski, G.Tomassini, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of Holomorphy*, J. Funct. Anal **101**, no. 4 (1991), 392-407.